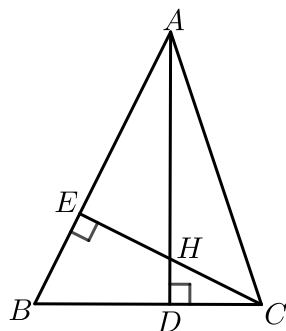


第1讲三垂直模型(加油站)

一、双垂直模型

练习1

1. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ ， $CE \perp AB$ ，垂足分别为 D 、 E ， AD 、 CE 交于点 H ，已知 $EH = EB = 4$ ， $AE = 6$ ，则 CH 的长为（ ）。



A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【答案】 B

【解析】 在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ ， $CE \perp AB$ ，

$$\therefore \angle AEH = \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAH + \angle AHE = 90^\circ, \angle DHC + \angle BCH = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EHA = \angle DHC \text{ (对顶角相等)},$$

$$\therefore \angle EAH = \angle DCH \text{ (等量代换)},$$

$\therefore$ 在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle HAE$ 中，

$$\begin{cases} \angle BEC = \angle HEA \\ \angle BCE = \angle HAE, \\ BE = HE = 3 \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AEH \cong \triangle CEB \text{ (AAS)},$$

$$\therefore AE = CE,$$

$$\therefore EH = EB = 4, AE = 6,$$

$$\therefore CH = CE - EH = AE - EH = 6 - 4 = 2.$$

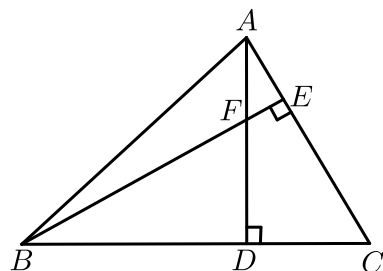
故选B.

【标注】 【知识点】 AAS

【知识点】 全等三角形的对应边与角

【能力】推理论证能力

2. 如图，在三角形 ABC 中， $\angle ABC = 45^\circ$ ，点 F 是 $\triangle ABC$ 的高 AD 、 BE 的交点，已知 $CD = 4$ ， $AF = 2$ ，则线段 BC 的长为 _____ 。



【答案】 10

【解析】 $\because AD$ 是 $\triangle ABC$ 的高，

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ,$$

$$\because \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle BAD,$$

$$\therefore AD = BD,$$

$\because BE$ 是 $\triangle ABC$ 的高，

$$\therefore \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBD + \angle C = 90^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle CAD + \angle C = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FBD = \angle CAD,$$

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle ADC$ 中，

$$\begin{cases} \angle FBD = \angle CAD \\ BD = AD \\ \angle BDF = \angle ADC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle ADC (\text{ASA}),$$

$$\therefore DF = CD = 4,$$

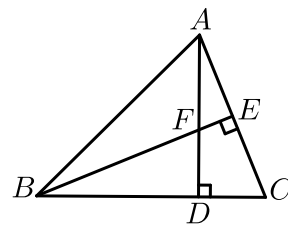
$$\therefore AD = AF + DF = 2 + 4 = 6 = BD,$$

$$\therefore BC = BD + CD = 6 + 4 = 10.$$

【标注】【知识点】ASA

3.

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 45^\circ$ ， $AC = 8\text{cm}$ ．若 F 是高 AD 和 BE 的交点，则 BF 的长是_____．



【答案】 8cm

【解析】 $\because F$ 是高 AD 和 BE 的交点，

$$\therefore \angle ADC = \angle ADB = \angle AEF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAD + \angle AFE = 90^\circ, \angle DBF + \angle BFD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle BFD,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle FBD,$$

$$\therefore \angle ADB = 90^\circ, \angle ABC = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD = 45^\circ = \angle ABD,$$

$$\therefore AD = BD,$$

在 $\triangle DBF$ 和 $\triangle DAC$ 中，

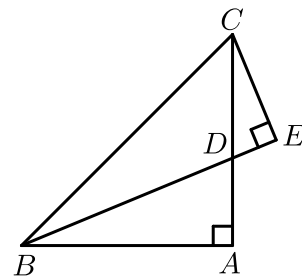
$$\begin{cases} \angle FBD = \angle CAD \\ DB = AD \\ \angle FDB = \angle CDA \end{cases},$$

$$\therefore \triangle DBF \cong \triangle DAC (\text{ASA}),$$

$$\therefore BF = AC = 8\text{cm}.$$

【标注】【知识点】ASA

4. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ， BD 平分 $\angle ABC$ 且 $CE \perp BD$ 于 E ．



(1) $\angle ECD =$ _____ $^\circ$.

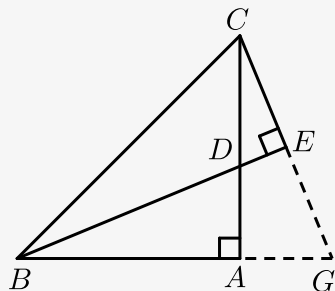
(2) 求证： $BD = 2EC$.

【答案】(1) 22.5

(2) 证明见解析.

【解析】(1)

(2) 如图, 延长 CE 交 BA 的延长线于点 G ,



$\because BD$ 平分 $\angle ABC$, $CE \perp BD$,

$\therefore CE = GE$,

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACG$ 中,

$$\begin{cases} \angle DBA = \angle ACG \\ \angle BAC = \angle CAG, \\ AB = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACG (\text{AAS})$,

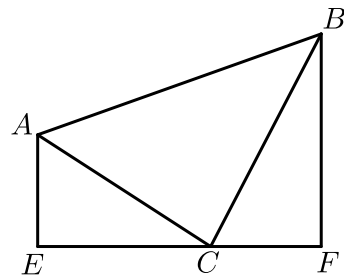
$\therefore BD = CG = 2CE$.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

二、一线三垂直

练习2

5. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AC \perp BC$, 过点 A, B 分别作过点 C 的直线的垂线 AE, BF . 若 $AE = CF = 3$, $BF = 4.5$, 则 $EF = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】7.5

【解析】∵过点 A, B 分别作过点 C 的直线的垂线 AE, BF ,

$$\therefore \angle AEC = \angle CFB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAC + \angle ACE = \angle ACE + \angle BCF,$$

$$\therefore \angle EAC = \angle FCB,$$

$$\text{又} \because AE = CF,$$

$$\therefore \triangle AEC \cong \triangle CFB (\text{ASA}),$$

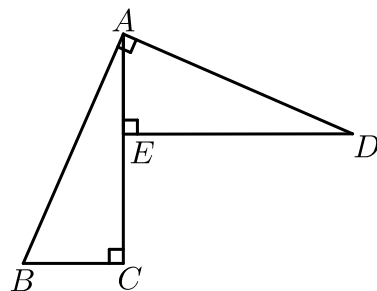
$$\therefore EC = BF = 4.5,$$

$$\therefore EF = EC + CF = 4.5 + 3 = 7.5.$$

故答案为: 7.5.

【标注】【知识点】三垂直模型

6. 如图, $AC \perp BC$ 于 C , $DE \perp AC$ 于 E , $AD \perp AB$ 于 A , $BC = AE$. 若 $AB = 5$, 则 $AD =$ _____.

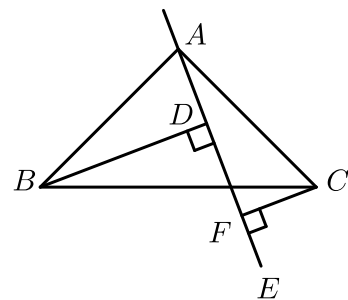


【答案】5

【解析】此题可根据已知条件 $AC \perp BC$ 于 C , $DE \perp AC$ 于 E , $AD \perp AB$ 于 A , 可得 $\angle B = \angle EAD$, 然后由 $BC = AE$, 用 ASA 证明 $\triangle ABC \cong \triangle DAE$, 则 $AD = AB = 5$.

【标注】【知识点】三垂直模型

7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, 过点 A 在 $\triangle ABC$ 内部作直线 AE , 作 $BD \perp AE$ 于 D , 作 $CF \perp AE$ 于 F , 若 $BD = 5$, $CF = 2$, 则 DF 的长为 ().



A. 2

B. 3

C. 5

D. 7

【答案】 B

【解析】 $\because BD \perp AE, CF \perp AE,$

$$\angle BDA = \angle AFC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle BAD = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle CAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle CAF,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CAF$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADB = \angle CFA \\ \angle 1 = \angle CAF \\ AB = CA \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CAF (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = CF, BD = AF,$$

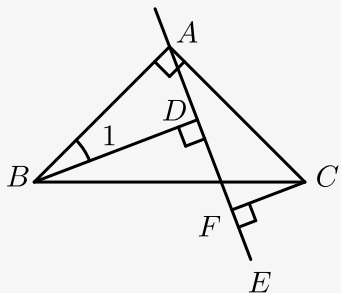
$$\because AF = AD + DF,$$

$$\therefore BD = CF + DF,$$

$$\because BD = 5, CF = 2,$$

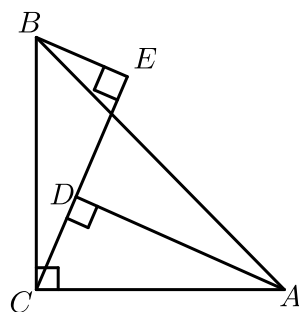
$$\therefore DF = 3.$$

故选B.



【标注】【知识点】三垂直模型

8. 如图, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, $AD \perp CE$, $BE \perp CE$, 若 $AD = 3$, $BE = 1$, 则 $DE = (\quad)$



A. 2

B. 3

C. 4

D. 1

【答案】 A

【解析】 $\because AD \perp CE$, $BE \perp CE$,

$$\therefore \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ,$$

$$\because \angle BCE + \angle CBE = 90^\circ, \angle BCE + \angle DCA = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle DCA = \angle CBE,$$

$$\text{在 } \triangle ACD \text{ 和 } \triangle CBE \text{ 中, } \begin{cases} \angle ACD = \angle CBE \\ \angle ADC = \angle CEB \\ AC = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE (\text{AAS}),$$

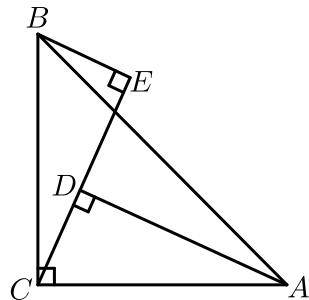
$$\therefore CE = AD = 3, CD = BE = 1, DE = CE - CD = 3 - 1 = 2.$$

故选: A.

【标注】 【知识点】 AAS

【知识点】 全等三角形的对应边与角

9. 如图, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, $AD \perp CE$, $BE \perp CE$, 垂足分别为 D , E .



(1) 证明: $\triangle BCE \cong \triangle CAD$.

(2) 若 $AD = 25\text{cm}$, $BE = 8\text{cm}$, 求 DE 的长.

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) 17cm .

【解析】(1) $\because \angle ACB = 90^\circ, BE \perp CE, AD \perp CE,$

$$\therefore \angle BEC = \angle ACB = \angle ADC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle BCE = 90^\circ,$$

$$\angle BCE + \angle CBE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle CBE,$$

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CAD$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADC = \angle BEC \\ \angle ACD = \angle CBE, \\ AC = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CAD (\text{AAS}).$$

(2) $\because \triangle BCE \cong \triangle CAD,$

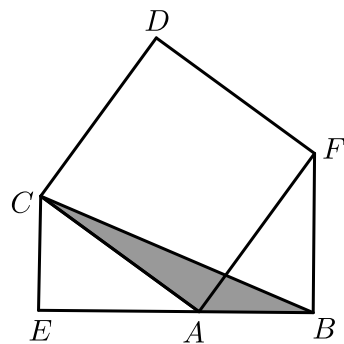
$$\therefore AD = CE, BE = CD,$$

$$\therefore DE = CE - CD = AD - BE = 25 - 8 = 17 (\text{cm}).$$

【标注】【知识点】一线三等角模型

练习3

10. 如图, 四边形 $ACDF$ 是正方形, $\angle CEA$ 和 $\angle ABF$ 都是直角且点 E, A, B 三点共线, $AB = 4$, 则阴影部分的面积是 _____ .



【答案】8

【解析】 $\because$ 四边形 $ACDF$ 是正方形,

$$\therefore AC = AF, \angle CAF = 90^\circ,$$

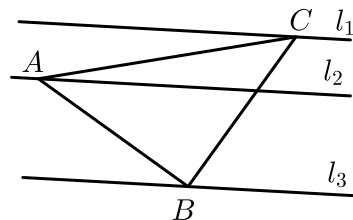
$$\therefore \angle EAC + \angle FAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ABF = 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \angle AFB + \angle FAB = 90^\circ, \\
&\therefore \angle EAC = \angle AFB, \\
&\text{在 } \triangle CAE \text{ 和 } \triangle AFB \text{ 中,} \\
&\quad \begin{cases} \angle CAE = \angle AFB \\ \angle AEC = \angle FBA, \\ AC = AF \end{cases} \\
&\therefore \triangle CAE \cong \triangle AFB \text{ (AAS)}, \\
&\therefore EC = AB = 4, \\
&\therefore \text{阴影部分的面积} = \frac{1}{2} \times AB \times CE = 8.
\end{aligned}$$

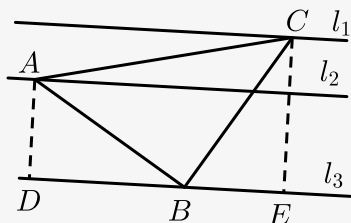
【标注】【知识点】三垂直模型

11. 如图, 已知 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC$, 三角形的顶点在相互平行的三条直线 l_1 , l_2 , l_3 上, 且 l_1 , l_2 之间的距离为2, l_2 , l_3 之间的距离为3, 则 $\triangle ABC$ 的面积是 _____.



【答案】17

【解析】如图, 作 $AD \perp l_3$ 于 D , 作 $CE \perp l_3$ 于 E .



$$\begin{aligned}
&\therefore \angle ABC = 90^\circ, \\
&\therefore \angle ABD + \angle CBE = 90^\circ. \\
&\text{又} \therefore \angle DAB + \angle ABD = 90^\circ, \\
&\therefore \angle BAD = \angle CBE, \\
&\text{在 } \triangle ABD \text{ 和 } \triangle BCE \text{ 中,} \\
&\quad \begin{cases} \angle BAD = \angle CBE \\ AB = BC \\ \angle ADB = \angle BEC \end{cases}, \\
&\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCE \text{ (ASA)}, \\
&\therefore BE = AD.
\end{aligned}$$

$\therefore l_1, l_2$ 之间的距离为2, l_2, l_3 之间的距离为3,

$\therefore BE = AD = 3, CE = 2 + 3 = 5.$

$\therefore S_{\triangle ABC} = S_{\text{梯形}ADEC} - S_{\triangle ADB} - S_{\triangle CBE}$

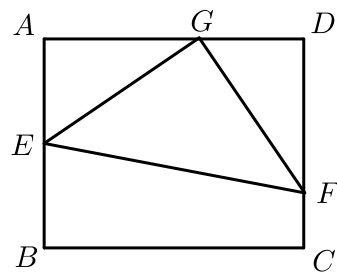
$$= \frac{1}{2} \times (3 + 5) \times 8 - \frac{1}{2} \times 3 \times 5 \times 2$$

$$= 32 - 15 = 17.$$

故答案为: 17.

【标注】【知识点】勾股定理与全等

12. 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, $AB = 4, AD = 5$, E 为 AB 的中点, 点 F, G 分别在 CD, AD 上, $\triangle EFG$ 为等腰直角三角形, 则四边形 $BCFE$ 的面积为 ().



A. 10

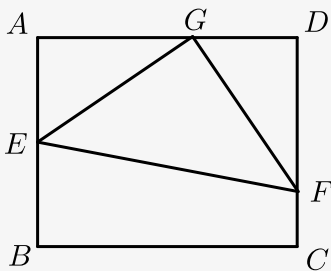
B. 9

C. $\frac{35}{4}$

D. $\frac{15}{2}$

【答案】D

【解析】



$\therefore \triangle GEF$ 为等腰直角三角形,

$\therefore GE = GF, \angle EGF = 90^\circ,$

$\therefore \angle AGE + \angle DGF = 90^\circ,$

$\therefore \angle AEG + \angle AGE = 90^\circ,$

$\therefore \angle AEG = \angle DGF,$

$\therefore \triangle AEG \cong \triangle DGF (\text{AAS}),$

$\therefore AE = GD, AG = DF,$

$\therefore AB = 4, AD = 5, E$ 为 AB 的中点,

$\therefore DG = AE = 2, AG = DF = AD - DG = 3,$

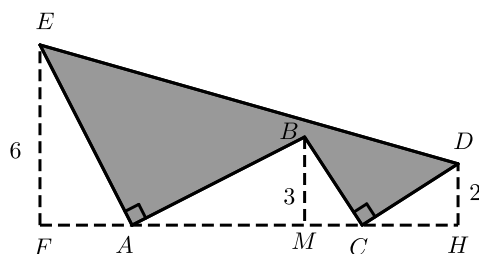
$$\therefore CF = CD - DF = 4 - 3 = 1,$$

$$\therefore S_{\text{四边形}BCFE} = \frac{1}{2} \times (2 + 1) \times 5 = \frac{15}{2}.$$

故选：D.

【标注】【知识点】一线三等角模型

13. 如图， $AE \perp AB$ 且 $AE = AB$ ， $BC \perp CD$ 且 $BC = CD$ ，若点 E, B, D 到直线 AC 的距离分别为 6, 3, 2，则图中实线所围成的阴影部分面积 S 是 () .



A. 50

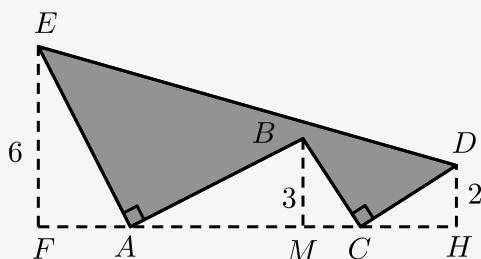
B. 44

C. 38

D. 32

【答案】D

【解析】 $\because AE \perp AB, EF \perp AF, BM \perp AM,$



$$\therefore \angle F = \angle AMB = \angle EAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEA + \angle EAF = 90^\circ,$$

$$\angle EAF + \angle BAM = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FEA = \angle BAM,$$

在 $\triangle FEA$ 和 $\triangle MAB$ 中，

$$\begin{cases} \angle F = \angle BMA \\ \angle FEA = \angle BAM, \\ AE = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FEA \cong \triangle MAB (\text{AAS}),$$

$$\therefore AM = EF = 6, AF = BM = 3,$$

$$\text{同理 } CM = DH = 2, BM = CH = 3,$$

$$\therefore FH = 3 + 6 + 2 + 3 = 14,$$

$$\therefore S_{\text{梯}} = (6+2) \times 14 \times \frac{1}{2} = 56,$$

$$\therefore S_{\text{阴}} = 56 - \frac{1}{2} \times 6 \times 3 - \frac{1}{2} \times 8 \times 3 - \frac{1}{2} \times 3 \times 2 = 32.$$

故选D.

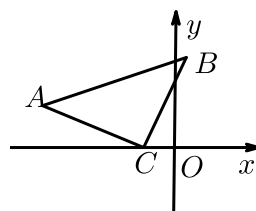
【标注】【能力】推理论证能力

【知识点】AAS

【知识点】全等三角形的对应边与角

练习4

14. 如图, 在 $\triangle ACB$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 点C的坐标为 $(-2, 0)$, 点A的坐标为 $(-6, 3)$, 则B点的坐标是 _____.



【答案】(1, 4)

【解析】过A和B分别作 $AD \perp OC$ 于D, $BE \perp OC$ 于E,

$$\begin{aligned} \because \angle ACB &= 90^\circ, \\ \therefore \angle ACD + \angle CAD &= 90^\circ, \\ \angle ACD + \angle BCE &= 90^\circ, \\ \therefore \angle CAD &= \angle BCE, \end{aligned}$$

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle CEB$ 中,

$$\begin{cases} \angle ADC = \angle CEB = 90^\circ \\ \angle CAD = \angle BCE \\ AC = BC \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle CEB \text{ (AAS)},$$

$$\therefore DC = BE, AD = CE,$$

$$\because \text{点C的坐标为}(-2, 0), \text{点A的坐标为}(-6, 3),$$

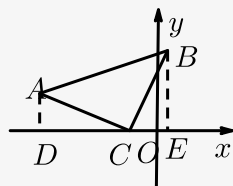
$$\therefore OC = 2, AD = CE = 3, OD = 6,$$

$$\therefore CD = OD - OC = 4, OE = CE - OC = 3 - 2 = 1,$$

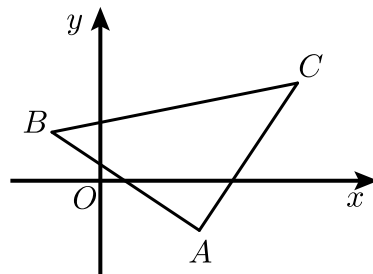
$$\therefore BE = 4,$$

$$\therefore \text{则B点的坐标是}(1, 4).$$

故答案为: (1, 4).

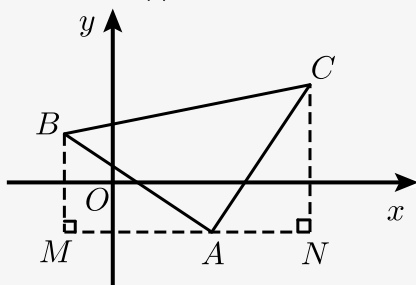


15. 如图所示，直角坐标系中 $A(2, -1)$ ， $B(-1, 1)$ ， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AB = AC$ ，则 C 点坐标为 _____ .



【答案】(4, 2)

【解析】过 A 作 $MN \parallel x$ 轴，



过 B 作 $BM \perp MN$ 于 M ，过 C 作 $CN \perp MN$ 于 N ，

$$\therefore \angle M = \angle N = 90^\circ = \angle BAC.$$

$$\therefore \angle MBA + \angle MAB = \angle NAC + \angle MAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle MBA = \angle NAC.$$

在 $\triangle AMB$ 和 $\triangle CNA$ 中，

$$\begin{cases} \angle M = \angle N \\ \angle MBA = \angle NAC, \\ AB = CA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle AMB \cong \triangle CNA (\text{AAS}).$$

$$\therefore AM = CN, BM = AN,$$

$$\therefore A(2, -1), B(-1, 1),$$

$$\therefore M(-1, -1),$$

$$\therefore AM = 3, BM = 2,$$

$$\therefore AN = 2, CN = 3,$$

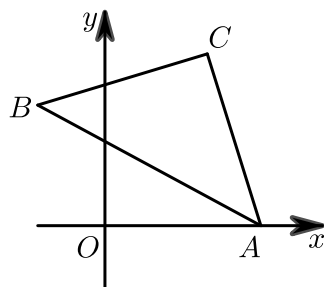
$$\therefore N(4, -1),$$

$$\therefore C(4, 2).$$

故答案为：(4, 2) .

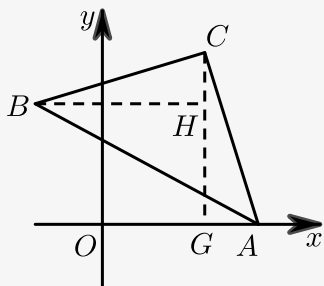
【标注】【知识点】三垂直模型

16. 如图, $\angle C = 90^\circ$, $AC = BC$, 点 C 在第一象限内. 若 $A(5, 0)$ 、 $B(-2, 4)$, 则点 C 的坐标为 _____.



【答案】(3.5, 5.5)

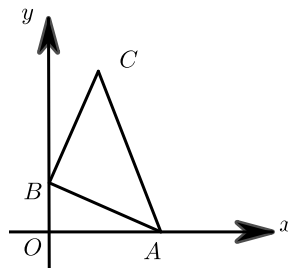
【解析】做 $CG \perp x$ 轴, $BH \perp y$ 轴,



由三垂直模型可知, $\triangle CBH \cong \triangle ACG$,
 $\therefore$ 设 $CH = AG = x$, 则 $BH = CG = 7 - x$,
 $\therefore GH = 7 - x - x = 4$,
 $\therefore x = 1.5$,
 $\therefore C(3.5, 5.5)$.

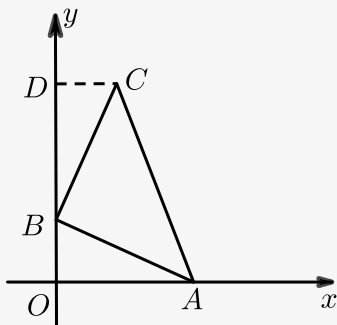
【标注】【知识点】辅助线综合运用

17. 如图, 在平面直角坐标系中, 以 $A(2, 0)$, $B(0, t)$ 为顶点作等腰直角 $\triangle ABC$ (其中 $\angle ABC = 90^\circ$, 且点 C 落在第一象限内), 则点 C 关于 y 轴的对称点 C' 的坐标为 _____ (用含 t 的代数式表示).



【答案】 $(-t, t+2)$

【解析】 过 C 作 $CD \perp y$ 轴于点 D ,



$$\therefore \angle ABC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle CBD + \angle OBA = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle OAB + \angle OBA = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle CBD = \angle OAB ,$$

$$\text{又} \because AB = BC , \angle AOB = \angle BDC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle ABO \text{ (AAS)} ,$$

$$\therefore AO = BD , BO = CD ,$$

$$\therefore A(2, 0) , B(0, t) ,$$

$$\therefore OA = 2 , OB = t ,$$

$$\therefore BD = 2 , CD = t ,$$

$$\therefore OD = BD + OB = 2 + t ,$$

$$\therefore C(t, 2+t) ,$$

$$\therefore C' \text{ 与 } C \text{ 关于 } y \text{ 轴对称} ,$$

$$\therefore C'(-t, 2+t) ,$$

$$\text{答案是 : } (-t, 2+t) .$$

【标注】 【知识点】 三垂直模型

练习5

18. 在 $\triangle ABC$ 中 , $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 直线 MN 经过点 C , 且 $AD \perp MN$ 于 D , $BE \perp MN$ 于 E .

(1) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 (1) 位置时 , DE 、 AD 与 BE 有怎样的数量关系 , 并加以证明 .

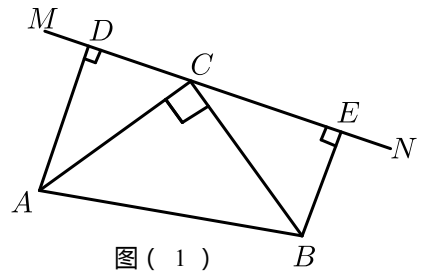


图 (1)

(2) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 (2) 的位置时, 写出它们之间的等量关系: _____ .

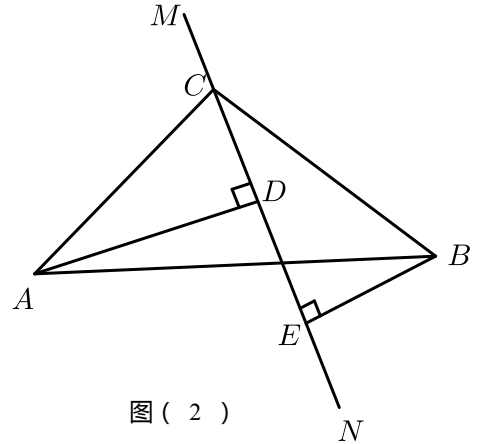


图 (2)

(3) 当直线 MN 绕点 C 旋转到图 (3) 的位置时, 写出它们之间的等量关系: _____ .

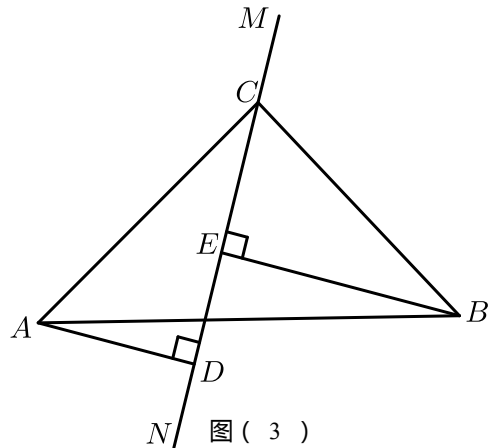


图 (3)

【答案】 (1) $DE = AD + BE$; 证明见解析 .

(2) $DE = CE - CD = AD - BE$

(3) $DE = CD - CE = BE - AD$

【解析】 (1) $DE = AD + BE$,

如图 (1) ,

$\because \angle ACB = 90^\circ$,

$\therefore \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ$,

$\because AD \perp MN$, $BE \perp MN$,

$$\therefore \angle ADC = \angle CEB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle DAC = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle DAC = \angle ECB ,$$

在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle CBE$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle ADC = \angle CEB \\ \angle DAC = \angle ECB , \\ AC = CB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE (\text{AAS}) ,$$

$$\therefore AD = CE , CD = BE ,$$

$$\therefore DE = CD + CE = BE + AD .$$

$$(2) \because \angle ACB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ ,$$

$$\therefore AD \perp DN ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle CAD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BCE , \text{ 又 } AC = BC ,$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE (\text{AAS}) ,$$

$$\therefore AD = CE , BE = CD ,$$

$$\therefore DE = CE - CD = AD - BE .$$

$$(3) DE = CD - CE = BE - AD ,$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle BCE = 90^\circ ,$$

$$\therefore AD \perp DN ,$$

$$\therefore \angle ACD + \angle CAD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BCE , \text{ 又 } AC = BC ,$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBE (\text{AAS}) ,$$

$$\therefore AD = CE , BE = CD , DE = CD - CE = BE - AD .$$

【标注】【知识点】三垂直模型

19. 如图1 , $OA = 2$, $OB = 4$, 以A点为顶点、AB为腰在第三象限作等腰Rt $\triangle ABC$.

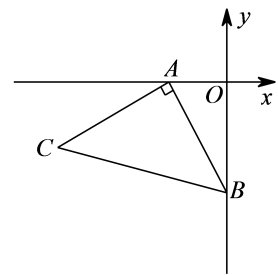


图1

(1) 求C点的坐标.

(2) 如图2, P 为 y 轴负半轴上一个动点, 当 P 点沿 y 轴负半轴向下运动时, 以 P 为顶点, PA 为腰作等腰 $\text{Rt} \triangle APD$, 过 D 作 $DE \perp x$ 轴于 E 点, 求 $OP - DE$ 的值.

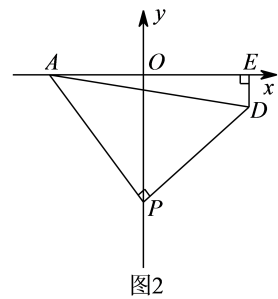


图2

【答案】 (1) 点C的坐标为 $(-6, -2)$.

(2) $OP - DE = 2$.

【解析】 (1) 如图1, 过C作 $CM \perp x$ 轴于M点,

$$\because \angle MAC + \angle OAB = 90^\circ$$

$$, \angle OAB + \angle OBA = 90^\circ$$

,

$$\text{则} \angle MAC = \angle OBA,$$

在 $\triangle MAC$ 和 $\triangle OBA$ 中,

$$\begin{cases} \angle CMA = \angle AOB = 90^\circ \\ \angle MAC = \angle OBA \\ AC = AB \end{cases}$$

,

$$\therefore \triangle MAC \cong \triangle OBA (\text{AAS}),$$

$$\therefore CM = OA = 2, MA = OB = 4,$$

$$\therefore OM = OA + AM = 2 + 4 = 6,$$

$$\therefore \text{点C的坐标为} (-6, -2).$$

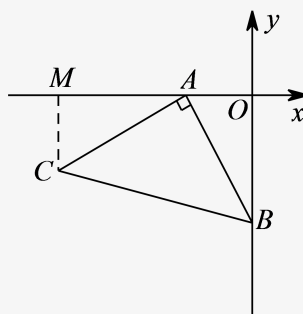


图1

(2) 如图2, 过D作 $DQ \perp OP$ 于Q点,

$$\text{则} DE = OQ,$$

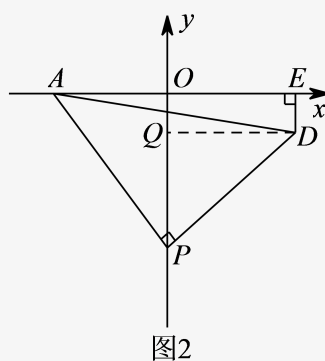


图2

$$OP - DE = OP - OQ = PQ,$$

$$\because \angle APO + \angle QPD = 90^\circ, \angle APO + \angle OAP = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle QPD = \angle OAP,$$

在 $\triangle AOP$ 和 $\triangle PQD$ 中,

$$\begin{cases} \angle AOP = \angle PQD = 90^\circ \\ \angle OAP = \angle QPD \\ AP = PD \end{cases},$$

$$\therefore \triangle AOP \cong \triangle PQD (\text{AAS}),$$

$$\therefore PQ = OA = 2, \text{ 即 } OP - DE = 2.$$

【标注】【能力】分析和解决问题能力

【知识点】全等三角形的性质

【知识点】AAS

20. 已知：在平面直角坐标系中， $\triangle ABC$ 的顶点 A 、 C 分别在 y 轴、 x 轴上，且 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $AC = BC$ 。

(1) 如图1，当 $A(0, -2)$ ， $C(1, 0)$ ，点 B 在第四象限时，则点 B 的坐标为 _____。

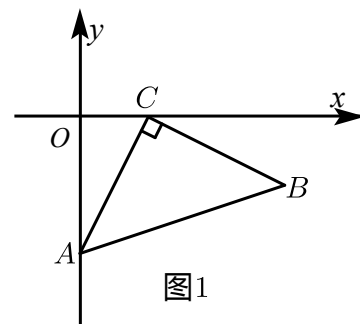
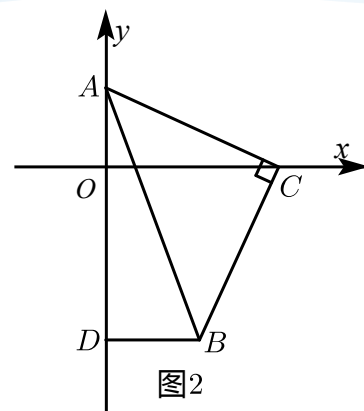


图1

(2) 如图2，当点 C 在 x 轴正半轴上运动，点 A 在 y 轴正半轴上运动，点 B 在第四象限时，作 $BD \perp y$ 轴于点 D ，试判断 $\frac{OC + BD}{OA}$ 与 $\frac{OC - BD}{OA}$ 哪一个为定值，并说明定值是多少？请证明你的结论。



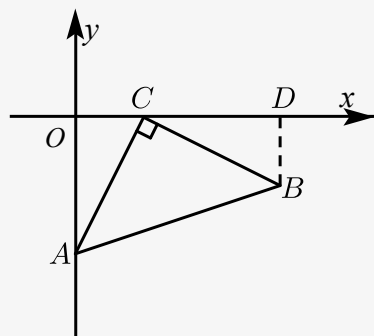
- (3) 当点 C 在 x 轴正半轴上运动, 点 A 在 y 轴正半轴上运动, 点 B 在第一象限时, 作 $BD \perp y$ 轴于点 D , 请直接写出一个 OA , OC , BD 之间的等量关系 _____ .

【答案】(1) $(3, -1)$

(2) $\frac{OC - BD}{OA}$ 存在定值, 且为 1 .

(3) $AO + CO = BD$

【解析】(1) 作 $BD \perp x$ 轴于 D .



$$\because \angle OCA + \angle DCB = 90^\circ, \angle OAC + \angle OCA = 90^\circ .$$

$$\therefore \angle OAC = \angle DCB .$$

$$\because \angle AOC = \angle CDB = 90^\circ, AC = BC .$$

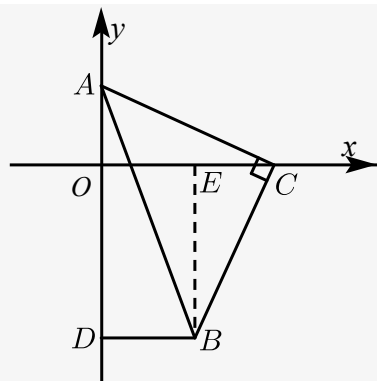
$$\therefore \triangle OAC \cong \triangle DCB (\text{AAS}).$$

$$\therefore CD = OA = 2, BD = OC = 1, OD = 3.$$

$\therefore B$ 在第四象限 .

$\therefore B$ 为 $(3, -1)$.

(2) 作 $BE \perp x$ 轴于 E ,



$\therefore$ 四边形 $ODBE$ 为矩形 .

$\therefore \angle ACO + \angle BCO = 90^\circ$, $\angle ACO + \angle OAC = 90^\circ$.

$\therefore \angle BCO = \angle CAO$.

$\therefore \angle AOC = \angle CEB = 90^\circ$, $AC = BC$.

$\therefore \triangle OAC \cong \triangle ECB (\text{AAS})$.

$\therefore EC = OA$.

$\therefore$ 在矩形 $ODBE$ 中 ,

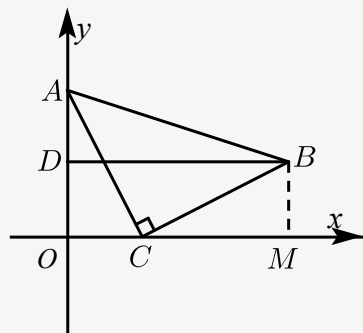
$\therefore OE = BD$.

$\therefore OC = OE + EC$.

$\therefore OC = AO + BD$.

$\therefore \frac{OC - BD}{OA} = 1$.

(3) 过 B 作 $BM \perp x$ 轴于 M .



$\therefore \angle OAC + \angle OCA = 90^\circ$, $\angle ACO + \angle BCM = 90^\circ$.

$\therefore \angle OAC = \angle BCM$.

$\therefore \angle AOC = \angle BMC = 90^\circ$, $AC = BC$.

$\therefore \triangle ACO \cong \triangle CBM (\text{AAS})$.

$\therefore OC = BM$, $AO = CM$.

$\therefore \angle DOM = \angle OMB = \angle ODB = 90^\circ$.

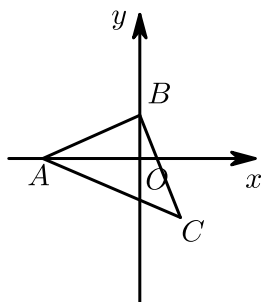
$\therefore$ 四边形 $ODBM$ 为矩形 .

$\therefore DB = OM = OC + CM = OC + AO$.

$\therefore OC + AO = BD$.

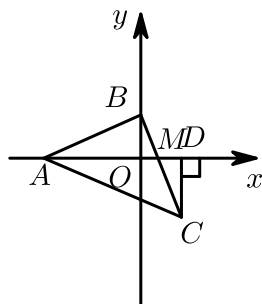
21. 如图，等腰 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ，点 A 、 B 分别在坐标轴上．

(1) 如图①，若 C 点的横坐标为5，求 B 点的坐标．



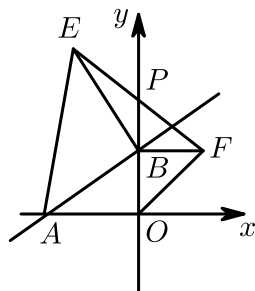
图①

(2) 如图②，若 x 轴恰好平分 $\angle BAC$ ， BC 交 x 轴于点 M ，过 C 点作 $CD \perp x$ 轴于 D 点，求 $\frac{CD}{AM}$ 的值．



图②

(3) 如图③，若点 A 的坐标为 $(-4, 0)$ ，点 B 在 y 轴的正半轴上运动时，分别以 OB 、 AB 为边在第一、第二象限作等腰 $\text{Rt}\triangle OBF$ ，等腰 $\text{Rt}\triangle ABE$ ，连接 EF 交 y 轴于 P 点，当点 B 在 y 轴上移动时， PB 的长度是否发生改变？若不变，求出 PB 的值，若变化，求 PB 的取值范围．



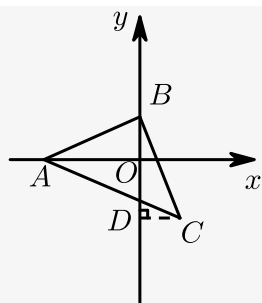
图③

【答案】(1) $B(0, 5)$

(2) $\frac{CD}{AM} = \frac{1}{2}$

(3) $PB = 2$

【解析】(1) 过 C 点作 $CD \perp y$ 轴于 D 点，



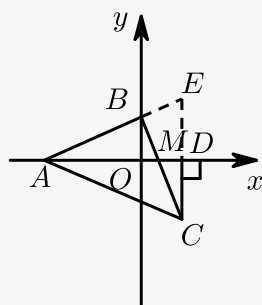
图①

证明 $\triangle AOB \cong \triangle BDC$,

$\therefore OB = CD = 5$.

$\therefore B(0, 5)$.

(2) 延长 CD 、 AB 交于点 E .



图②

$\because x$ 轴平分 $\angle BAC$,

$\therefore \angle EAD = \angle CAD$.

又 $\because CD \perp x$ 轴 ,

$\therefore \angle EDA = \angle CDA = 90^\circ$,

$\therefore \triangle EAD \cong \triangle CAD(ASA)$,

$\therefore ED = CD$.

又 $\because AB = CB$,

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle CBE(ASA)$,

$\therefore AM = CE = 2CD$.

(3) $PB = 2$, 过 E 点作 $EG \perp y$ 轴于 G 点 , 证明 $\triangle ABO \cong \triangle BEG$, 再证明 $\triangle EGP \cong$

$\triangle FBP$, 则 $GP = BP$, $\therefore BG = AO$, $\therefore PB = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}AO = 2$.

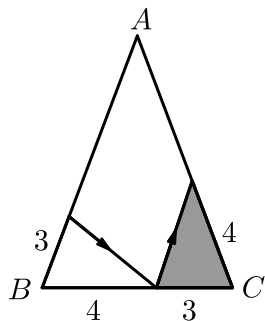
【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

三、 一线三等角

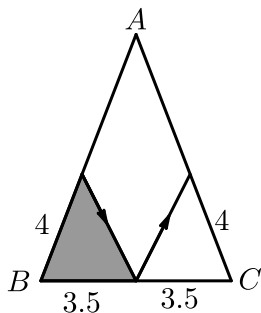
练习6

22. 如图，有一张三角形纸片 ABC ，已知 $\angle B = \angle C = x^\circ$ ，按下列方案用剪刀沿着箭头方向剪开，所剪下的三角形纸片不一定是全等图形的是（ ）。

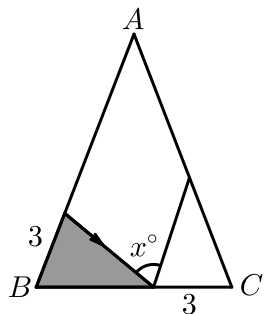
A.



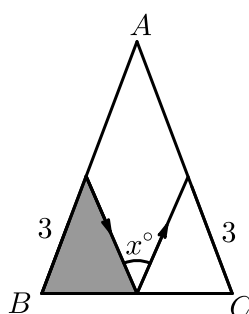
B.



C.



D.



【答案】 D

【解析】 A 选项：由全等三角形的判定定理SAS可证得图中两个小三角形全等。

B 选项：由全等三角形的判定定理SAS可证得图中两个小三角形全等。

C 选项：如图， $\because \angle DEC = \angle B + \angle BDE$,

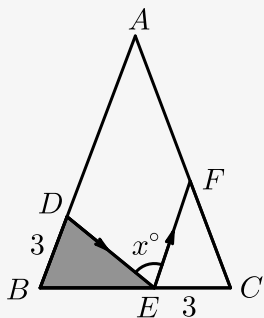
$\therefore x^\circ + \angle FEC = x^\circ + \angle BDE$,

$\therefore \angle FEC = \angle BDE$,

$\because BD = EC = 3$, $\angle B = \angle C$,

$\therefore \triangle BDE \cong \triangle CEF(ASA)$,

即能判定两个小三角形全等。



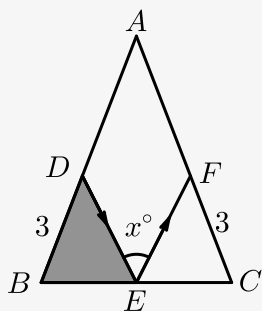
D 选项：如图， $\because \angle DEC = \angle B + \angle BDE$ ，

$\therefore x^\circ + \angle FEC = x^\circ + \angle BDE$ ，

$\therefore \angle FEC = \angle BDE$ ，

所以其对应边应该是 BE 和 CF ，而已知给的是 $BD = FC = 3$ ，

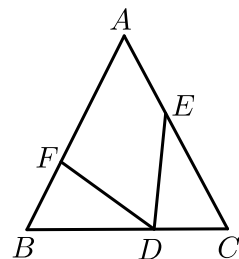
即不能判定两个小三角形全等。



故选 D。

【标注】【知识点】一线三等角模型

23. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，若 $AB = AC$ ， $CD = BF$ ， $BD = CE$ ， $\angle A = 62^\circ$ ，则 $\angle EDF$ 的度数为 _____ 度。



【答案】59

【解析】 $\because AB = AC$ ， $\angle A = 62^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A) = 59^\circ.$$

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle CED$ 中，
$$\begin{cases} BD = CE \\ \angle B = \angle C \\ CD = BF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle CED (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle CDE = \angle BFD,$$

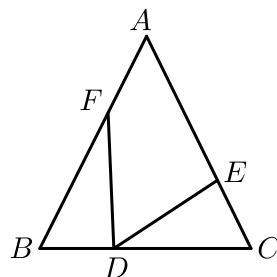
$$\because \angle BDF + \angle BFD + \angle B = 180^\circ, \angle BDF + \angle EDF + \angle CDE = 180^\circ.$$

$$\therefore \angle EDF = \angle B = 59^\circ.$$

故答案为：59.

【标注】【知识点】一线三等角模型

24. 如图， D 为 $\triangle ABC$ 边 BC 上一点， $AB = AC$ ，且 $BF = CD$ ， $CE = BD$ ，则 $\angle EDF$ 等于（ ）.



A. $90^\circ - \angle A$

B. $90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

C. $180^\circ - \angle A$

D. $45^\circ - \frac{1}{2}\angle A$

【答案】B

【解析】 $\because AB = AC,$

$$\therefore \angle B = \angle C,$$

在 $\triangle FBD$ 和 $\triangle DCE$ 中，

$$\begin{cases} BF = CD \\ \angle B = \angle C \\ BD = CE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle FBD \cong \triangle DCE (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle BFD = \angle CDE,$$

$$\text{在} \triangle BFD \text{中}, \angle B + \angle BFD + \angle BDF = 180^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle EDF + \angle CDE + \angle BDF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle EDF = \angle B,$$

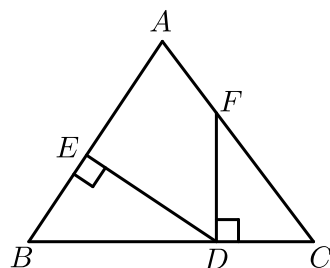
$$\text{在} \triangle ABC \text{中}, \angle B = \frac{180^\circ - \angle A}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A,$$

$$\therefore \angle EDF = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A.$$

故选B.

【标注】【知识点】SAS

25. 如图，点 D 在 BC 上， $DE \perp AB$ 于点 E ， $DF \perp BC$ 交 AC 于点 F ， $BD = CF$ ， $BE = CD$ ，若 $\angle AFD = 142^\circ$ ，则 $\angle EDF =$ _____ 度。



【答案】 52

【解析】 $\because DE \perp AB, DF \perp CD,$

$$\therefore \angle DEB = \angle FDC = 90^\circ.$$

在 $\text{Rt}\triangle DEB$ 和 $\text{Rt}\triangle FDC$ 中，

$$\begin{cases} BE = CD \\ BD = CF \end{cases}$$

$\therefore \text{Rt}\triangle DEB \cong \text{Rt}\triangle FDC (\text{HL}),$

$$\therefore \angle EDB = \angle DFC.$$

$$\because \angle AFD = 142^\circ,$$

$$\therefore \angle DFC = 180^\circ - \angle AFD = 38^\circ,$$

$$\therefore \angle EDB = 38^\circ,$$

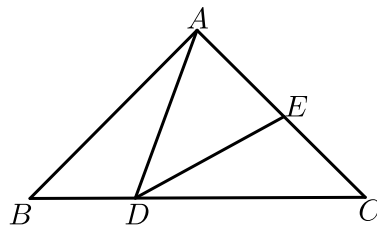
$$\therefore \angle EDF = 180^\circ - \angle EDB - \angle FDC$$

$$= 180^\circ - 38^\circ - 90^\circ$$

$$= 52^\circ.$$

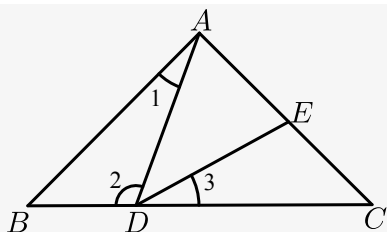
【标注】 【知识点】 一线三等角模型

26. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D, E 分别为边 BC, AC 上的点，且满足 $BD = CE$ ， $\angle B = \angle C = \angle ADE = 38^\circ$ ，则 $\angle DAE =$ _____ 。



【答案】 71°

【解析】 如图：



$$\therefore \angle B = \angle C = \angle ADE = 38^\circ$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ, \angle 2 + \angle 3 = 180^\circ - 38^\circ = 142^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3,$$

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle DCE$ 中,

$$\begin{cases} \angle 1 = \angle 3 \\ \angle B = \angle C, \\ BD = CE \end{cases}$$

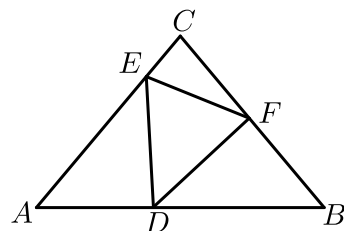
$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle DCE (\text{AAS}),$$

$$\therefore AD = DE,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AED = \frac{180^\circ - 38^\circ}{2} = 71^\circ.$$

【标注】【知识点】一线三等角模型

27. 如图, 等腰 $\triangle EDF$ 的三个顶点都在等腰 $\triangle ABC$ 的边上, 且 $\angle A = \angle B = 50^\circ$, $\angle DEF = \angle DFE = 65^\circ$. 求证: $\triangle EAD \cong \triangle DBF$.



【答案】证明见解析.

【解析】 $\because \angle DEF = \angle DFE = 65^\circ,$

$$\therefore \angle EDF = 50^\circ,$$

$$\text{又} \because \angle A = \angle B = 50^\circ,$$

$$\therefore \angle BDF = 180^\circ - \angle ADE - \angle EDF = 130^\circ - \angle ADE,$$

$$\angle AED = 180^\circ - \angle ADE - \angle A = 130^\circ - \angle ADE,$$

$$\therefore \angle BDF = \angle AED,$$

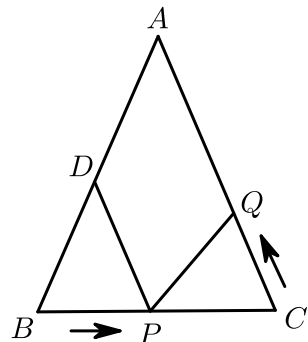
在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle AED$ 中,

$$\begin{cases} \angle B = \angle A \\ \angle BDF = \angle AED, \\ DF = ED \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle AED (\text{AAS}) .$$

【标注】【知识点】一线三等角模型

28. 如图，已知 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 10\text{cm}$ ， $BC = 8\text{cm}$ ，点 D 为 AB 的中点，如果点 P 在线段 BC 上以 3cm/s 的速度由 B 点向 C 点运动，同时，点 Q 在线段 CA 上由点 C 向点 A 运动。



- (1) 若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度相等，经过1秒后， $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 是否全等？请说明理由。
- (2) 若点 Q 的运动速度与点 P 的运动速度不相等，当点 Q 的运动速度为多少时，能够使 $\triangle BPD$ 与 $\triangle CQP$ 全等。

【答案】(1) 全等。

(2) $\frac{15}{4}$ 厘米/秒。

【解析】(1) $\because t = 1$ 秒，

$$\therefore BP = CQ = 3 \times 1 = 3 \text{ 厘米} ,$$

$$\because AB = 10 \text{ 厘米} , \text{ 点 } D \text{ 为 } AB \text{ 的中点}$$

$$\therefore BD = 5 \text{ 厘米}$$

$$\text{又} \because PC = BC - BP , BC = 8 \text{ 厘米} ,$$

$$\therefore PC = 8 - 3 = 5 \text{ 厘米} ,$$

$$\therefore PC = BD$$

$$\text{又} \because AB = AC ,$$

$$\therefore \angle B = \angle C ,$$

在 $\triangle BPD$ 和 $\triangle CQP$ 中，

$$\begin{cases} BD = CP \\ \angle B = \angle C , \\ BP = CQ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BPD \cong \triangle CQP (\text{SAS}) .$$

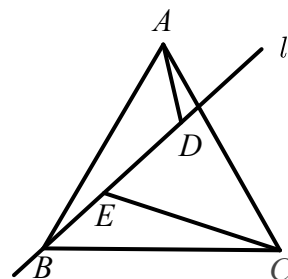
(2) $\because v_P \neq v_Q ,$

$$\begin{aligned}
&\therefore BP \neq CQ, \\
&\text{又} \because \triangle BPD \cong \triangle CPQ, \angle B = \angle C, \\
&\therefore BP = PC = 4\text{cm}, CQ = BD = 5\text{cm}, \\
&\therefore \text{点} P, \text{点} Q \text{运动的时间} t = \frac{BP}{3} = \frac{4}{3} \text{秒}, \\
&\therefore v_Q = \frac{CQ}{t} = \frac{5}{\frac{4}{3}} = \frac{15}{4} \text{ (厘米/秒)}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

练习7

29. 如图，直线 l 经过等边三角形 ABC 的顶点 B ，在 l 上取点 D 、 E ，使 $\angle ADB = \angle CEB = 120^\circ$ 。若 $AD = 2\text{cm}$ ， $CE = 5\text{cm}$ ，则 $DE = \underline{\hspace{2cm}} \text{cm}$ 。



【答案】3

【解析】如图， $\because \triangle ABC$ 为等边三角形，

$$\therefore AB = BC,$$

$$\angle ABC = 60^\circ,$$

$$\text{即} \angle ABD + \angle EBC = 60^\circ,$$

$$\because \angle ADB = 120^\circ,$$

$$\therefore \angle ABD + \angle BAD = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle BAD,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle BCE$ 中，

$$\begin{cases}
\angle BDA = \angle BEC \\
\angle DAB = \angle EBC, \\
AB = BC
\end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle BCE,$$

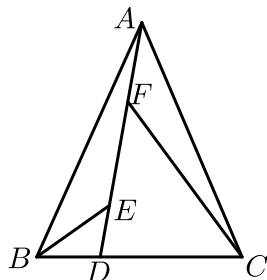
$$\therefore BD = CE = 5\text{cm},$$

$$BE = AD = 2\text{cm},$$

$$\therefore DE = 3\text{cm}.$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

30. 如图, 在等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $AB > BC$, 点 D 在边 BC 上, 且 $\frac{BD}{BC} = \frac{1}{4}$, 点 E 、 F 在线段 AD 上, 满足 $\angle BED = \angle CFD = \angle BAC$, 若 $S_{\triangle ABC} = 20$, 则 $S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDF}$ 是多少 () ?



A. 9

B. 12

C. 15

D. 18

【答案】C

【解析】 $\because \angle BED = \angle CFD = \angle BAC$,

$$\therefore \angle EBA + \angle EAB = \angle FAC + \angle ACF = \angle EAB + \angle FAC,$$

$$\therefore \angle EBA = \angle FAC, \angle EAB = \angle ACF,$$

$$\therefore \angle ABE = \angle CAF, AB = CA, \angle BAE = \angle FCA,$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAF \text{ (ASA)},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} = S_{\triangle CAF},$$

$$\therefore S_{\triangle ABE} + S_{\triangle CDF} = S_{\triangle CAF} + S_{\triangle CDF} = S_{\triangle ACD},$$

$$\because \frac{BD}{BC} = \frac{1}{4},$$

$$\therefore BC = 4BD,$$

$$\therefore CD = 3BD,$$

$$\therefore CD : BC = 3 : 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ACD} : S_{\triangle ABC} = CD : BC = 3 : 4,$$

$$\because S_{\triangle ABC} = 20,$$

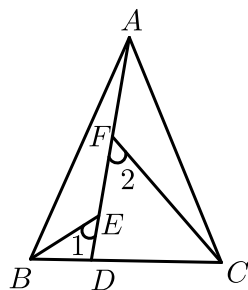
$$\therefore S_{\triangle ACD} = 15,$$

即 $\triangle ABE$ 与 $\triangle CDF$ 的面积之和是15.

故选C.

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-等边对等角

如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $AB > BC$ ，点 D 在边 BC 上， $CD = 3BD$ ，点 E 、 F 在线段 AD 上， $\angle 1 = \angle 2 = \angle BAC$ 。若 $\triangle ABC$ 的面积为16，则 $\triangle ACF$ 与 $\triangle BDE$ 的面积之和为 _____。



【答案】 4

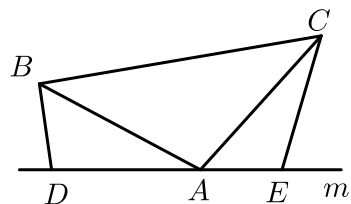
【解析】 $\because \angle 1 = \angle 2 = \angle BAC$ ， $\angle 1 = \angle BAE + \angle ABE$ ， $\angle BAC = \angle BAE + \angle CAF$ ，
 $\angle 2 = \angle FCA + \angle CAF$ ，
 $\therefore \angle ABE = \angle CAF$ ， $\angle BAE = \angle FCA$ ，
 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle CAF$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABE = \angle CAF \\ AB = AC \\ \angle BAE = \angle ACF \end{cases}$$
，
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle CAF (ASA)$ ，
 $\therefore S_{\triangle ACF} + S_{\triangle BDE} = S_{\triangle ABD}$ ，
 $\because \triangle ABC$ 的面积为16， $CD = 3BD$ ，
 $\therefore \triangle ABD$ 的面积是： $\frac{1}{4} \times 16 = 4$ ，
 $\therefore \triangle ACF$ 与 $\triangle BDE$ 的面积之和等于 $\triangle ABE$ 与 $\triangle BDE$ 的面积之和，
 即等于 $\triangle ABD$ 的面积，是4。
 故答案为：4。

【标注】【知识点】ASA

练习8

32. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， D ， A ， E 三点都在一条直线上，且
 $\angle BDA = \angle AEC = \angle BAC$ ， $BD = 2$ ， $CE = 3$ ，则 DE 的长为 _____。



【答案】5

【解析】由题可得： $\angle BDA = \angle AEC = \angle BAC$ ，

$$\therefore \angle AEC + \angle ACE + \angle CAE = 180^\circ,$$

$$\angle BAC + \angle BAD + \angle CAE = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle BAD,$$

在 $\triangle BAD$ 和 $\triangle ACE$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAD = \angle ACE \\ \angle BDA = \angle AEC, \\ BA = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BAD \cong \triangle ACE \text{ (AAS)},$$

$$\therefore BD = AE, AD = CE,$$

$$\therefore DE = DA + AE = 3 + 2 = 5.$$

故答案为：5.

【标注】【知识点】一线三等角模型

33. CD 是经过 $\angle ACB$ 顶点 C 的一条直线， $CA = CB$ ， E 、 F 分别是直线 CD 上两点，点 E 在点 F 的左侧，且 $\angle BEC = \angle CFA = \angle \alpha$ 。

(1) 直线 CD 经过 $\angle ACB$ 的内部， E 、 F 两点在射线 CD 上。

① 如图1，若 $\angle ACB = 90^\circ$ ， $\angle \alpha = 90^\circ$ ，则 BE _____ CF (填“>” “<” 或 “=”)。 EF 、 BE 、 AF 三条线段之间的数量关系是 _____。

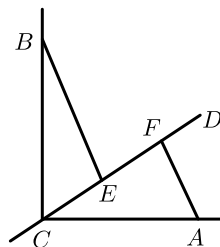


图1

② 如图2，若 $0^\circ < \angle ACB < 180^\circ$ ， $\angle \alpha + \angle ACB = 180^\circ$ ，①中的两个结论是否仍然成立，请说明理由。

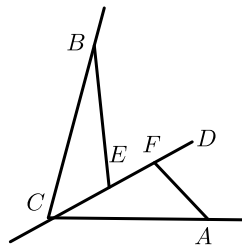
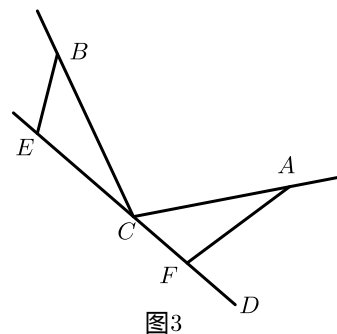


图2

(2)

如图3，若直线 CD 经过 $\angle ACB$ 的外部， $\angle \alpha = \angle ACB$ ，请直接写出 EF 、 BE 、 AF 三条线段之间的数量关系．



【答案】(1) ① $EF = BE - AF$

② ①中两个结论仍然成立．证明见解析．

(2) $EF = BE + AF$ ．

【解析】(1) ① 如图1，

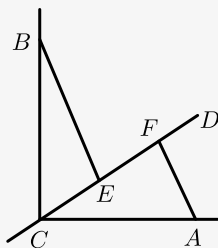


图1

E 点在 F 点的左侧，

$\because BE \perp CD, AF \perp CD, \angle ACB = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BEC = \angle AFC = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BCE + \angle ACF = 90^\circ, \angle CBE + \angle BCE = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle CBE = \angle ACF$ ，

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CAF$ 中，

$$\begin{cases} \angle EBC = \angle ACF \\ \angle BEC = \angle AFC \\ BC = AC \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CAF (AAS)$ ，

$\therefore BE = CF, CE = AF$ ，

$\therefore EF = CF - CE = BE - AF$ ．

故答案为： $EF = BE - AF$ ．

② 如图2，

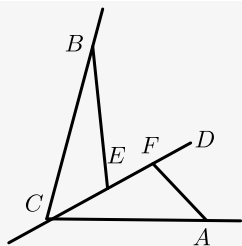


图2

$$\because \angle BEC = \angle CFA = \angle \alpha, \angle \alpha + \angle ACB = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle CBE = \angle ACF,$$

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle CAF$ 中,

$$\begin{cases} \angle EBC = \angle ACF \\ \angle BEC = \angle AFC, \\ BC = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCE \cong \triangle CAF (\text{AAS}),$$

$$\therefore BE = CF, CE = AF,$$

$$\therefore EF = CF - CE = BE - AF.$$

(2) 如图3中,

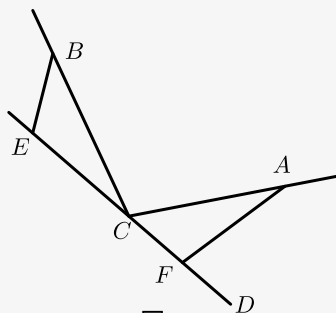


图3

$$\because \angle BEC = \angle CFA = \angle \alpha, \angle \alpha = \angle BCA,$$

$$\text{又} \because \angle EBC + \angle BCE + \angle BEC = 180^\circ, \angle BCE + \angle ACF + \angle ACB = 180^\circ$$

,

$$\therefore \angle EBC + \angle BCE = \angle BCE + \angle ACF,$$

$$\therefore \angle EBC = \angle ACF,$$

在 $\triangle BEC$ 和 $\triangle CFA$ 中,

$$\begin{cases} \angle EBC = \angle FCA \\ \angle BEC = \angle CFA, \\ BC = CA \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BEC \cong \triangle CFA (\text{AAS}),$$

$$\therefore AF = CE, BE = CF,$$

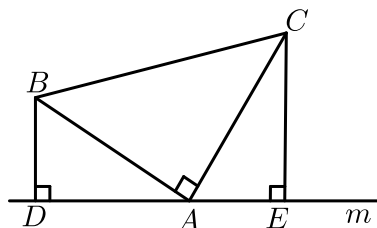
$$\therefore EF = CE + CF,$$

$$\therefore EF = BE + AF.$$

【标注】【知识点】一线三等角模型

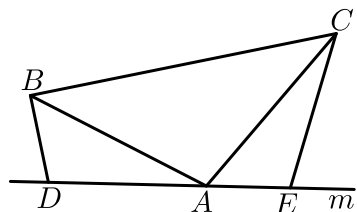
34. 解答下列各题 .

- (1) 如图①, 已知: $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC$, 直线 m 经过点 A , $BD \perp m$ 于 D , $CE \perp m$ 于 E , 求证: $DE = BD + CE$.



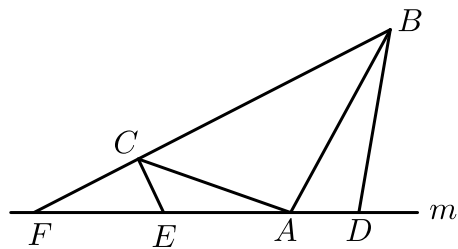
图①

- (2) 拓展: 如图②, 将 (1) 中的条件改为: $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 、 A 、 E 三点都在直线 m 上, 并且 $\angle BDA = \angle AEC = \angle BAC = \alpha$, α 为任意锐角或钝角, 请问结论 $DE = BD + CE$ 是否成立? 如成立, 请证明; 若不成立, 请说明理由.



图②

- (3) 应用: 如图③, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC$ 是钝角, $AB = AC$, $\angle BAD > \angle CAE$, $\angle BDA = \angle AEC = \angle BAC$, 直线 m 与 BC 的延长线交于点 F , 若 $BC = 2CF$, $\triangle ABC$ 的面积是 16, 求 $\triangle ABD$ 与 $\triangle CEF$ 的面积之和.



图③

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 成立; 证明见解析 .

(3) 8 .

【解析】 (1) $\because BD \perp$ 直线 m , $CE \perp$ 直线 m ,

$$\therefore \angle BDA = \angle CEA = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle ABD = 90^\circ ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ABD ,$$

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle CEA$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle BDA = \angle CEA , \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CEA (\text{AAS}) ,$$

$$\therefore AE = BD , AD = CE ,$$

$$\therefore DE = AE + AD = BD + CE .$$

(2) 结论 $DE = BD + CE$ 成立 ; 理由如下 :

$$\therefore \angle BDA = \angle BAC = \alpha ,$$

$$\therefore \angle DBA + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAE = 180^\circ - \alpha ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ABD ,$$

在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle CEA$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle BDA = \angle CEA , \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CEA (\text{AAS}) ,$$

$$\therefore AE = BD , AD = CE ,$$

$$\therefore DE = AE + AD = BD + CE .$$

(3) $\therefore \angle BAD > \angle CAE , \angle BDA = \angle AEC = \angle BAC ,$

$$\therefore \angle CAE = \angle ABD ,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CEA$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle BDA = \angle CEA , \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CEA (\text{AAS}) ,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle CEA} ,$$

设 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上的高为 h , 则 $\triangle ACF$ 的底边 CF 上的高为 h ,

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot h = 16 , S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} CF \cdot h ,$$

$$\therefore BC = 2CF ,$$

$$\therefore S_{\triangle ACF} = 8 ,$$

$$\therefore S_{\triangle ACF} = S_{\triangle CEF} + S_{\triangle CEA} = S_{\triangle CEF} + S_{\triangle ABD} = 8 ,$$

$$\therefore \triangle ABD \text{ 与 } \triangle CEF \text{ 的面积之和为 } 8 .$$

【标注】【知识点】一线三等角模型

35. 如图1, 已知: $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, 直线 m 经过点 A , 过点 B 作 $BD \perp m$ 于 D , $CE \perp m$ 于 E . 我们把这种常见图形定义为“K”字图.

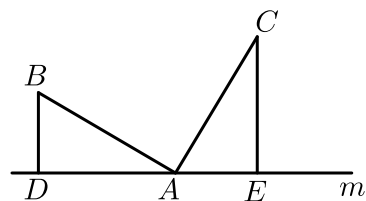


图 1

- (1) 线段 DE , BD , CE 之间的数量关系是 _____ .
 (2) 如图2, 若 $AB = AC$, $\angle BAC = \angle BDA = \angle AEC$, 则线段 DE , BD , CE 之间的数量关系还成立吗? 如果成立, 请证明之.

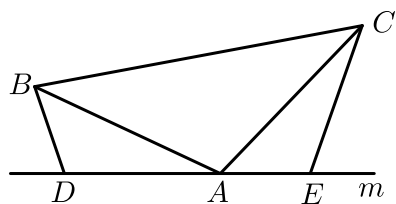


图 2

- (3) 如图3, 若 $AB = AC$, $\angle BAC = \angle BDA = \angle AEC = 120^\circ$, 点 F 为 $\angle BAC$ 平分线上的一点, 且 $\triangle ABF$ 和 $\triangle ACF$ 均为等边三角形, $BD = 3$, $CE = 6$, 求 $\triangle DEF$ 的周长.

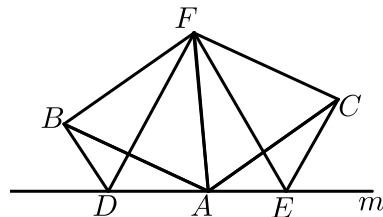


图 3

【答案】 (1) $DE = BD + CE$

(2) 线段 DE , BD , CE 之间的数量关系还成立, 证明见解析.

(3) 27.

【解析】 (1) $\because BD \perp$ 直线 m , $CE \perp$ 直线 m ,

$$\therefore \angle BDA = \angle CEA = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAD + \angle CAE = 90^\circ,$$

$$\because \angle BAD + \angle ABD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ABD,$$

$$\therefore \text{在} \triangle ADB \text{和} \triangle CEA \text{中}, \begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle BDA = \angle CEA \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CEA (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = BD, AD = CE,$$

$$\therefore DE = AE + AD = BD + CE.$$

(2) 线段 DE 、 BD 、 CE 之间的数量关系还成立，

证明：设 $\angle BDA = \angle BAC = \alpha$ ，

$$\therefore \angle DBA + \angle BAD = \angle BAD + \angle CAE = 180^\circ - \alpha,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle ABD,$$

$\therefore$ 在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle CEA$ 中，

$$\begin{cases} \angle ABD = \angle CAE \\ \angle BDA = \angle CEA, \\ AB = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CEA (\text{AAS}),$$

$$\therefore AE = BD, AD = CE,$$

$$\therefore DE = AE + AD = BD + CE.$$

(3) 由 (2) 知， $\triangle ADB \cong \triangle CEA$ ，

$$\therefore BD = AE, \angle DBA = \angle CAE,$$

$\therefore \triangle ABF$ 和 $\triangle ACF$ 均为等边三角形，

$$\therefore \angle ABF = \angle CAF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBA + \angle ABF = \angle CAE + \angle CAF,$$

$$\therefore \angle DBF = \angle FAE,$$

$$\therefore BF = AF,$$

在 $\triangle DBF$ 和 $\triangle EAF$ 中，

$$\begin{cases} FB = FA \\ \angle FBD = \angle FAE, \\ BD = AE \end{cases}$$

$$\therefore \triangle DBF \cong \triangle EAF (\text{SAS}),$$

$$\therefore DF = EF, \angle BFD = \angle AFE,$$

$$\therefore \angle DFE = \angle DFA + \angle AFE = \angle DFA + \angle BFD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle DEF$ 为等边三角形，

$$\therefore \triangle DEF \text{ 的周长} = 3DE = 3(BD + CE) = 3(3 + 6) = 27.$$

【标注】【知识点】一线三等角模型